Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Références : Gourdon, Hirsch, Pommelet, Zuily-Queffelec

I - Espaces métriques compacts
1) Propriété de Borel-Lebesgue
2) Propriété de Bolzano-Weierstrass
3) Compacité en dimension finie

II - Fonctions continues sur un compact
1) Extrema et théorème de Heine
2) Théorème de Stone-Weierstrass
3) Points fixes

III - Théorème d'Ascoli et applications
1) Equicontinuité et théorème d'Ascoli
2) Opérateurs compacts
3) Espaces de fonctions holomorphes

DEV 1 : Equivalence des normes et théorème de Riesz

DEV 2 : Théorème de Stone-Weierstrass

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

I - Espaces métriques compacts (E, d) espace métrique

1) Propriété de Borel-Lebesgue [GOU]

DEF 1 : (Borel-Lebesgue) (E,d) est dit compact lorsque de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert, il existe $J \subset I$ fini, $E = \bigcup_{j \in J} O_j$.

EX 2 : . Tout espace métrique fini est compact
. $\mathbb{R}$ n'est pas compact

PROP 3 : Un espace métrique compact est borné.

PROP 4 : (E,d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

PROP 5 : Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact E, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

PROP 6 : $A \subset E$ est compact si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de E, il en existe un sous-recouvrement fini.

COR 7 : Une réunion finie de parties compactes est compacte

COR 8 : Une intersection de compacts est compacte.

2) Propriété de Bolzano-Weierstrass [GOU]

DEF 9 : On dit que (E,d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass lorsque toute suite d'éléments de E admet une sous-suite convergente.

PROP 10 : Un espace métrique compact vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

DEF 11 : (E,d) est dit précompact lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε.

LEMME 12 : Si (E,d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass alors (E,d) est précompact.

LEMME 13 : Si (E,d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, soit $E = \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors :
$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I, B(x,\alpha) \subset O_i$

THM 14 : (E,d) est compact si et seulement si (E,d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

COR 15 : (E,d) est compact si et seulement si l'une de ces assertions est vérifiée :
- Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E
- Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E

PROP 16 : . Si E est compact et $A \subset E$ est fermée, alors A est compacte
. Si $A \subset E$ est compacte, alors A est fermée bornée.

PROP 17 : Si (E,d) est compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence alors $x_n \longrightarrow x$.

PROP 18 : Si (E,d) est compact, alors (E,d) est complet

PROP 19 : Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces métriques. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est compact ssi E_i est compact pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

PROP 20 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergente, l sa limite. Alors $\Gamma = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

3) Compacité en dimension finie [GOU]

$(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé (evn) DEV 1/a)

THM 21 : Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E.

COR 22 : Soit $(F, \| \|)$ un autre evn et E de dimension finie. Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors f est continue.

COR 23 : Tout evn de dimension finie est complet.

COR 24 : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

DEV 1/b)

COR 25 : Les compacts de E de dimension finie sont les fermés bornés.

THM 26 : (Riesz) $(E, \| \|)$ est dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.

EX 27 : $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = I_n\}$ est compacte

APPLI 28 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

II - Fonctions continues sur un compact

+ AJOUTER RUNGE

1) Extrema et théorème de Heine [POM]

THM 29 : Soient E, F deux espaces métriques, avec E compact. Si $f : E \to F$ est continue, alors $f(E)$ est compact.

THM 30 : On suppose (E,d) compact. Soit $f : E \to F$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme.

THM 31 : Soit (E,d) compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

REM 32 : Pour les fonctions de la variable réelle, ce théorème donne les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

APPLI 33 : Soit $A \subset E$ compact, $A \neq \emptyset$:
- $\exists x \in A$, $d(y,A) = d(x,y)$
- $\exists a,b \in A$, $d(a,b) = diam(A)$
- Soit $F \subset E$ fermée non vide, E evn de dimension finie $\forall y \in E, \exists x \in F, \|x-y\| = d(x,F)$.

THM 34 : (Heine) Soit (E,d) compact, $f : (E,d) \to (F,\delta)$ continue. Alors, f est uniformément continue.

EX 35 : • Toute fonction continue périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est uniformément continue
• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$

APPLI 36 : Une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dans un evn E de dimension finie est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

APPLI 37 : Toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est Riemann intégrable

2) Théorème de Stone-Weierstrass [HiR] (E,d) compact

DEF 38 : Soit $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. On dit que H est réticulée lorsque $\forall f,g \in H$, $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$. DEV 2a)

LEMME 39 : Soit $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ vérifiant les conditions :
a) H est réticulée
b) Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques de E, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$, $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$.
Alors H est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

DEF 40 : On dit que $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est séparante lorsque : $\forall x \neq y \in E$, $\exists f \in H$, $f(x) \neq f(y)$

REM 41 : H est réticulée $\Leftrightarrow \forall h \in H, |h| \in H$. DEV 2b)

THM 42 : Si H est un sev de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

THM 43 : (Stone-Weierstrass réel) Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ séparante contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

EX 44 : • L'ensemble des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.
• Soit X compact de $\mathbb{R}^d$ et $H = \{x \mapsto P(x) / P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$
Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.
Avec $d=1$, on retrouve le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales

REM 45 : L'ensemble $H = \{z \mapsto P(z) / P \in \mathbb{C}[X]\}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

THM 46 : (Stone-Weierstrass complexe) Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

EX 47 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{C}([0;2\pi],\mathbb{C})$. On retrouve la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}([0;2\pi],\mathbb{C})$.

3) Points fixes [ROM]

THM 48 : Soit (E,d) compact et $f : E \to E$ telle que :
$$\forall (x,y) \in E\times E,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y)$$
Alors, f possède un unique point fixe. De plus, pour $a \in E$, la suite récurrente donnée par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

THM 49 : Soit C compacte convexe non vide de l'evn E et $f : C \to C$ telle que : $\forall (x,y) \in C^2, \|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$
Alors, f possède au moins un point fixe.

THM 50 : (Brouwer) Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède un point fixe. [ADMIS]

III - Théorème d'Ascoli et applications

1) Équicontinuité et théorème d'Ascoli [H;R]

(X,d) compact, $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DEF 51: Soit $H \subset \mathcal{C}(X,K)$. On dit que H est équicontinue en $x_0 \in X$ lorsque :
$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in X, d(x,x_0)<\eta \Rightarrow \forall h \in H, d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$
Elle est dite équicontinue lorsqu'elle l'est en tout point.

DEF 52: $H \subset \mathcal{C}(X,K)$ est dite uniformément équicontinue lorsque : $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x,y \in X, d(x,y)<\eta \Rightarrow \forall h \in H, d(f(x),f(y))<\varepsilon$

PROP 53: (Heine) Comme X est compact, $H \subset \mathcal{C}(X,K)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

PROP 54: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_K(X)^{\mathbb{N}}$ et D dense dans X. Si $f_n(x)\to f(x)$ pour tout $x\in D$ et (f_n) est équicontinue, alors (f_n) converge vers f uniformément.

THM 55: (Ascoli) Une partie de $\mathcal{C}(X,K)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,K)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

EX 56: Toute partie fermée de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue.
Soit $C\in\mathbb{R}^+$. L'ensemble des fonctions C-lipschitziennes est équicontinue.

2) Opérateurs compacts [H;R]

$K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont deux K-evn.

DEF 57: On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$ tel que $T(\overline{B}_E(0,1))$ est relativement compacte. On note $K(E,F)$ leur ensemble.

EX 58: Avec le théorème d'Ascoli, on montre que : si X et Y sont deux espaces métriques compacts, $L\in\mathcal{C}(X\times Y,K)$ et μ mesure borélienne sur Y. On définit
$$T : \mathcal{C}(Y,K) \to \mathcal{C}(X,K), \quad f \mapsto \left(X\to K,\ x\mapsto \int_Y L(x,y) f(y)\, d\mu(y)\right)$$
Alors T est compact.

PROP 59: Tout opérateur T de rang fini est compact.

PROP 60: $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

COR 61: Si F est complet, toute limite dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est compact.

3) Espaces de fonctions holomorphes [Z-Q]

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ non vide. On note $H(U)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur U.

THM 62: (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(U)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ uniformément sur tout compact. Alors $f\in H(U)$ et : $\forall k\in\mathbb{N}$, $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^{(k)}$

DEF 63: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose $K_n=\{z\in\mathbb{C} / |z|\leq n \text{ et } d(z,\Omega^c)\geq \frac{1}{n}\}$

PROP 64: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, K_n est compact, $K_n\subset \mathring{K}_{n+1}$, $\Omega=\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$
$\forall K$ compact de Ω, $\exists n\geq 1, K\subset K_n$.

DEF 65: $\forall f,g\in H(U)$, on définit :
$$\delta(f,g)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \quad \text{où } p_n(f)=\sup_{z\in K_n}|f(z)|.$$

PROP 66: • $(H(U),\delta)$ est un espace métrique complet.
• Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in H(U)^{\mathbb{N}}$, $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ uniformément sur tout compact si et seulement si $\delta(f_n,f)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

THM 67: (Montel) Soit $A\subset H(U)$.
A est relativement compacte $\Leftrightarrow$ A est localement bornée.

APPLI 68: La topologie de la convergence uniforme sur les compacts sur $H(U)$ est métrisable (par δ) mais pas normable.